ЛЕКЦИЯ-3
ҚАТАРЛАР ТЕОРИЯСЫ

§1. Сандық қатарлар және олардың жинақтылығы

Айталық қайсыбір сан тібегі берілсін

$$a_1, a_2, ..., a_n, ...$$

Осы сан тібегінің мүшелерінен құралған өрнекті

$$a_1 + a_2 + ... + a_n + ... \qquad (1)$$

немесе

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (1)$$

сандық қатар немесе жай қатар деп атайды, $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ сандарын қатардың мүшелері, a_n санын қатардың жалпы мүшесі деп атайды.

(1) қатар мүшелерінен төмендегі қосындыларды құрайық:

$$S_1 = a_1,$$
$$S_2 = a_1 + a_2,$$
$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3,$$
$$------ ----$$
$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n,$$
$$----------$$

Сонда қосындылар

$$S_1, S_2, ..., S_n, ... \qquad (2)$$

сан тізбегін құрады, оларды (1) қатардың дербес қосындылары деп атайды.

Егер n шексіздікке ұмтылғанда (2) тізбектің шекті шегі бар болса, демек

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S,$$

онда (1) қатарды жинақты немесе жинақталады деп атайды да, оны

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

жазады, S санын қатардың қосындысы деп атайды. Егер n шексіздікке ұмтылғанда (2) тізбектің шекті шегі болмаса немесе шегі шексіздікке тең болса, (1) қатарды жинақсыз немесе жинақталмайды деп атайды. Қатардың жинақты, жинақсыздығын тағайындауды қатарды жинақтылыққа зерттеу дейді.

Сонымен, (1) қатардың жинақтылығы анықтама бойынша (2) тізбектің шекті шегінің бар болуымен және саны шекті сандардың қосындысынан өзгешелігі қатар қосындысы тек жинақты қатарлар үшін анықталады.

Төмендегі қатарларды жинақтылыққа зерттейік:

1-мысал. $\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + ... + \dfrac{1}{n(n+1)} + ...$

Шешуі. Қатардың жалпы мүшесі $a_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$, дербес қосындысы

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + ... + \frac{1}{n(n+1)}.$$

Дербес қосындыны табу үшін қатардың жалпы мүшесін жай бөлшектерге жіктейміз

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}.$$

Дербес қосындының әрбір мүшесін жіктеп жазып,

$$S_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}$$

аламыз.

Сонда

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1.$$

Берілген қатар жинақты және оның қосындысы $S=1$, сонымен $1=\sum_{n=1}^{n}\frac{1}{n(n+1)}$

2-мысал. Геометриялық прогрессияны қарастырайық:

$$a+aq+aq^2+\ldots+aq^{n-1}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}aq^{n-1},\ \ (a\neq 0).$$

Шешуі. Геометриялық прогрессияның алғашқы n мүшесінің қосындысы, яғни дербес қосынды белгілі

$$S_n=\frac{a-aq^n}{1-q}=\frac{a}{1-q}-\frac{aq^n}{1-q},\ \ (q\neq 1)..$$

Төмендегі жағдайларды қарастырамыз:

1) Айталық $|q|<1$ болсын, онда

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{1-q}-\frac{aq^n}{1-q}\right)=\frac{a}{1-q}.$$

Сонымен, қатар жинақты және оның қосындысы $S=\frac{a}{1-q}$ тең.

2) $|q|>1$ болсын, онда $\lim_{n\to\infty}S_n=a\lim_{n\to\infty}\frac{1-q^n}{1-q}=\pm\infty$, қатар жинақсыз.

3) $q=1$ болсын, онда $S_n=a+a+\ldots+a=n\cdot a$ және $\lim_{n\to\infty}S_n=a\lim_{n\to\infty}n=\infty$ демек, қатар жинақсыз.

4) $q=-1$ болсын, онда

$$S_n=\begin{cases}0, & \text{егер } n \text{ жұп сан болса},\\ a, & \text{егер } n \text{ тақ сан болса}.\end{cases}$$

яғни, дербес қосындының шегі жоқ қатар жинақсыз.

Сонымен, геометриялық қатар $|q|<1$ болғанда жинақты, ал $|q|\geq 1$ болғанда жинақсыз.

(1) қатардың алғашқы k мүшесін қалдырып жазайық

$$a_{k+1}+a_{k+2}+\ldots+a_{k+n}+\ldots=\sum_{n=k+1}^{\infty}a_n \qquad (3)$$

(3) қатарды (1) қатардың қалдығы деп атайды.

Теорема. Егер (1) қатар жинақты болса, онда (3) қатар да жинақты, керсінше, (3) жинақты болса, онда (1) қатар да жинақты.